數學傳播 46卷2期, pp. 6-19

愛小孩的歐拉—兼論 108 數學課綱

張鎮華

歐拉[1]不但是一位偉大的數學家, 也是一個愛小孩的父親。他可以一手抱著嬰兒, 讓大孩子圍在他的身邊嬉戲, 然後一邊寫數學論文; 歐拉的許多篇數學原稿是寫在小孩吃飯的圍兜上、給孩子擦嘴的紙巾上 $\cdots\cdots$。我們來談談這位慈父的數學工作。

1. 緣起—歐拉的外接圓半徑與內切圓半徑定理

喜見連威翔在數學傳播季刊第 180 期撰文 [1], 給歐拉不等式兩種證明方法。這個不等式是說: 如果一個三角形的外接圓半徑是 R、內切圓半徑是 r, 則有不等式

$$R \geq 2r, \tag{1}$$

而且等號成立時恰好是這個三角形是正三角形。這個不等式可以由一個更強的等式得到, 也就是, 這個三角形外心和內心的距離 d 滿足

$$d^2 = R(R-2r)。 \tag{2}$$

等式 (2) 可以輕易推得不等式 (1)。

連威翔文章的第一個證法利用餘弦定理、正弦定理、由此導出的海龍公式、算幾不等式, 證明了不等式 (1), 是一個可圈可點的證明。高中生如果有機會讀到這篇文章, 當可感受到, 原來數學課學習的餘弦定理、正弦定理、算幾不等式真有用。我個人覺得, 現在的學生太著重練習解題, 以便考試時熟能生巧; 倒是很建議他們多涉獵一些課外讀物, 數學傳播季刊的文章就是很好的課外讀物。

他的第二個證法是以向量爲工具, 證明了等式 (2), 這是一般高中老師喜歡的方法。我看了 108 數學課綱 [2] 的內容 (亦請參見單維彰主編的書 [3] 第 44 頁), 覺得 108 數學課綱有逐漸把高中的向量教學引導到另一個方向的傾向, 也就是在高中學習向量, 主要是爲了將來學習線性代數做準備, 逐漸脫離把向量當作解決平面幾何問題的另一種工具的思維。舉例來說, 108 數

[1]瑞士籍的傑出數學家和物理學家李昂哈德·保羅·歐拉 (德語 Leonhard Paul Euler), 1707 年 4 月 15 日 ∼ 1783 年 9 月 18 日, 是近代數學先驅之一, 大家公認他是有史以來最偉大的數學家之一。他一生大部分時間在俄國和普魯士度過。Euler 依其德文發音, 宜翻譯爲歐拉, 早期也有人翻譯爲尤拉。數學界前輩呂溪木校長在任職監察委員之前, 曾帶領我們審查高中數學教科書, 當時有過 Euler 到底要翻譯成「尤拉」或是「歐拉」之爭, 據他的解釋, 早期有些人照英文發音把 Eu 讀成尤, 才會翻譯成尤拉。

學課綱的學習內容 G-11A-1 的備註欄就提到「此處之向量以位置向量爲主, 以線性組合爲主要目標」, 雖然線性組合的內容在各版本的數學課綱都有, 此處特別強調其爲主要目標, 就是劍指線性代數。

本文最後回歸到完全用平面幾何的基本性質來證明等式 (2), 沒有向量, 沒有三角比, 沒有海龍公式, 也不需要算幾不等式。這個證明取材於維基百科, 歐拉定理 (幾何)。這個證明的好處是, 幾乎一樣的證明可以將內心換爲旁心, 得到類似的公式。我們也會順道談論, 108 數學課綱把國中的平面幾何略微減少內容的考量。

學數學宜讀數學史。本文亦將描述一些歐拉相關的數學史, 回應108 數學課綱,「壹、基本理念」中「三、數學是一種人文素養, 宜培養學生的文化美感」, 所描述的「$\cdots\cdots$ 人類各種族文明造就出不同的思維文化, 例如, 古代東方數學偏向具象方式的歸納推理, 而西方則傾向抽象方式的演繹思考, 數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同時期與不同文化的差異, 更能協助教師釐清數學學習的主軸。$\cdots\cdots$」, 以及「肆、核心素養」中「數 S-U-C3」的「具備欣賞數學觀念或工具跨文化傳承的歷史與地理背景的視野, 並了解其促成技術發展或文化差異的範例。」

2. 多產數學家歐拉作品面面觀

歐拉是一位多產數學家, 包括他生前發表及死後人們依他的手稿發表的數學和科學 (力學、光學和天文學) 論文高達 866 篇。就目前可考的資料顯示, 在作品影響後人深遠的數學家當中, 歐拉的論文數僅次於艾狄胥[2]的 1525 篇 (包括與人合寫的) 及專書 32 部。

1908 年瑞士科學院 (Swiss Academy of Sciences) 組成歐拉委員會 (Euler Committee), 將其論文編輯成系列書籍, 如下所述。

系列 I: Opera mathematica (數學), 共 29 卷, 已完成。

系列 II: Opera mechanica et astronomica (力學和天文), 共 31 卷。

系列 III: Opera physica, Miscellanea (物理及其他), 共 12卷, 已完成。

系列 IVA: Commercium epistolicum (通信), 共 9 卷。其中第 9 卷爲本系列最後的印刷版本, 其餘的通信資料公佈於網頁。

系列 IVB: 手稿, 於網頁發表。

---

[2]匈牙利籍猶太人數學家艾狄胥·帕爾 (匈牙利語 Erdős Pál), 1913 年 3 月 26 日 $\sim$ 1996 年 9 月 20 日, Erdős 讀作 air-dish, 匈牙利語中的意思是來自山林, 他的名字在英語中作保羅·艾狄胥 (Paul Erdős)。值得注意的是, 依照匈牙利的習慣, 姓氏是擺在前面, 這和中國人的習慣一樣; 在歐洲, 匈牙利是唯一有這種習慣的國家; 他也用英文寫法把姓氏放在後面, 是爲了到外國與人溝通的方便。事實上, 爲了方便在歐洲其他國家的期刊 (主要是德文期刊) 發表文章, Erdős、Kőnig Dénes 等匈牙利數學家, 都是把姓氏中的雙重音字母 ő (常見於匈牙利文) 改成了曲音字母 ö (常見於德文), 用 Erdös、König 的姓氏發表; 但是逐漸地隨著排版機制的進步及正名運動聲浪的興起, 最終是恢復了 Erdős、Kőnig 的正確寫法。
艾狄胥喜歡與人合寫論文, 共同作者高達 511 人, 所以人們很容易和他有關聯。現在很流行的一個概念是, 計算一個人的艾狄胥數 (Erdős number, 簡稱艾數), 它的意思如下。艾狄胥的艾數是 0, 與其合寫論文的人的艾數是 1, 與艾數是 1 的人合寫過論文、但艾數不是 $0 \sim 1$ 的人的艾數是 2, 依此類推, 與艾數是 j 的人合寫過論文、但艾數不是 $0 \sim j$ 的人的艾數是 $j+1$。沃爾夫獎 (Wolf Prize) 得主中艾數都在 3 之內。筆者的艾數是 2。
有關艾狄胥的介紹亦請參見兩本他的傳記 [4][5]。有關艾狄胥的工作亦請參見數學傳播季刊的文章 [6][7]。

接下來, 我們來談論一些歐拉的工作。除了前述連威翔的文章以外, 數學傳播季刊歷年來還有很多關於歐拉 (尤拉) 的文章 [8]~[21]。

數學符號

歐拉透過他廣爲流傳的專書 (例如《無限分析導論》兩卷 [22], 下一節將討論第一卷), 介紹了許多數學符號, 被廣爲使用。最爲著名的是, 他引進了函數的概念, 並且將函數寫爲 $f(x)$, 以表示一個以 x 爲自變量的函數。他還介紹了三角函數現代符號, 以 e 表記自然對數的底 (現在也稱作歐拉數), 用希臘字母 Σ 表記累加, 以 i 表示虛數單位。用希臘字母 π 來表示一個圓的周長和直徑之比, 雖然是瓊斯[3]介紹的, 但他的推廣功不可沒。

分析學

以前學微積分的時候, 看到英文課本的標題是 Calculus, 一直覺得用字不如中文的微分和積分來得精確, Calculus (計算) 太廣泛了, 數學中到處都在計算, 何止微積分。後來才知道, Calculus 原來叫做 infinitesimal calculus 或是 the calculus of infinitesimals, 無窮小的計算, 那就有道理了。也就是, 微積分是在研究連續變化的數學, 就像幾何是在研究形的數學, 代數是在研究算術運算推廣的數學。

無窮小計算的發展在 18 世紀是前沿的數學研究, 歐拉的好友、伯努利 (Bernoullis) 家族在這方面發展的貢獻極多, 由於他們的影響, 研究微積分成爲歐拉的重點工作。雖然他的一些證明, 以現代嚴格的尺度來看在數學上還不夠嚴謹 (特別是他在分析的推導仰賴代數的觀點, 這一點在下一節會再討論), 但是他的許多想法都促進了後來數學重大的發展。歐拉在分析學上廣爲人知的是, 經常使用、並發展冪級數, 也就是把一個函數寫成無窮多項的和, 例如

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots。$$

曼戈里[4]於 1650 年提問, 無窮級數

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

的值是多少。這個問題難倒了許多數學家。經過將近一個世紀, 歐拉於 1734 年利用冪級數的方法求出

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934,$$

並於 1735 年 12 月 5 日在聖彼得堡科學院 (Saint Petersburg Academy of Sciences) 宣讀, 一舉成名, 當時他才 28 歲。後來人們就以歐拉和伯努利家族的故鄉瑞士巴塞爾 (Basel), 稱呼這個問題爲巴塞爾問題。

---

[3]威爾斯數學家威廉·瓊斯 (William Jones), 1675 年 ~ 1749 年 7 月 3 日。

[4]義大利數學家皮耶特羅·曼戈里 (Pietro Mengoli), 1626 年 ~ 1686 年 6 月 7 日, 生長於義大利波隆納 (Bologna)。

歐拉把這個問題作了一番推廣, 他的想法後來被黎曼[5]在 1859 年的論文《論小於給定大數的質數個數》(On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude) 中所採用, 論文中定義了黎曼 ζ 函數, 並證明了它的一些基本性質。

由於歐拉的證明是他一貫使用的代數觀點的冪級數方法, $\frac{\pi^2}{6}$ 的答案雖然正確 (筆者用 C 程式的雙精度浮點型 double 計算級數和到 1000000 項, 得到的答案是 1.644933), 以現代的尺度來看, 歐拉的證明還不是十分嚴密, 真正嚴密的證明在 1741 年給出, 亦請參見數學傳播季刊的文章 [10]。

歐拉在 1734 年的文章《De Progressionibus harmonicis observationes》介紹了常數

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\approx 0.5772,$$

(更精確的近似值爲 0.57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 93992) 他當時用的符號是 C 和 O。1790 年, 馬斯凱羅尼[6]則用 A 和 a。後來的人則習慣用 γ 當符號來代表這個常數, 猜想是因爲它和 γ 函數有關。例如, 布雷特施奈德[7]在 1835 年就用 γ 這個符號, 摩根[8]在他 1836 年到 1842 年的教科書上亦使用此符號。

歐拉在分析學上使用指數與對數函數。他發展出各種對數函數的冪級數表示法, 成功地定義了複數和複數的對數, 擴大了對數的應用範圍。他也定義了複數的指數, 發現和三角函數的關係; 更精確來說, 對於實數 θ (當作弳度量) 歐拉公式爲

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta。$$

當作特例, 就是廣爲人知的歐拉等式

$$e^{i\pi}+1=0,$$

費曼[9]稱之爲「數學中最傑出的公式」, 現在有很多人稱之爲「數學中最漂亮的公式」, 一個式子把五個重要的常數 0、1、e、i、π 巧妙地組合起來。

小川洋子的《博士熱愛的算式》中 [23], 每一偶數頁的頁碼旁都有 $e^{\pi i}+1=0$ 這個公式, 其第 163 總結寫出如下優美的文句。

> 「永無止境地循環下去的數字, 和讓人難以捉摸的虛數畫出簡潔的軌跡, 在某一點落地。雖然沒有圓的出現, 但來自宇宙的 π 飄然地來到 e 的身旁, 和害羞的 i 握

---

[5] 德國數學家格奧爾格·弗雷德里希·伯恩哈德·黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann), 1826 年 9 月 17 日 ∼ 1866 年 7 月 20 日。

[6] 義大利數學家洛倫佐·馬斯凱羅尼 (Lorenzo Mascheroni), 1750 年 5 月 13 日 ∼ 1800 年 7 月 14 日。

[7] 德國數學家卡爾·安東·布雷特施奈德 (Carl Anton Bretschneider), 1808 年 5 月 27 日 ∼ 1878 年 11 月 6 日。

[8] 英國數學家及邏輯學家奧古斯塔斯·德·摩根 (Augustus De Morgan), 1806 年 6 月 27 日 ∼ 1871 年 3 月 18 日。

[9] 美國理論物理學家理察·菲利普斯·費曼 (Richard Phillips Feynman), 1918 年 5 月 11 日 ∼ 1988 年 2 月 15 日。費曼以對量子力學的路徑積分表述、量子電動力學、過冷液氦的超流性以及粒子物理學中部分子模型的研究聞名於世。因對量子電動力學的貢獻, 費曼於 1965 年與朱利安·施溫格及朝永振一郎共同獲得諾貝爾物理學獎。

著手。他們的身體緊緊地靠在一起, 屏住呼吸, 但有人加了 1 以後, 世界就毫無預警地發生了巨大的變化。一切都歸於 0。

歐拉公式就像是暗夜中閃現的一道流星; 也像是刻在漆黑的洞窟裡的一行詩句。」

歐拉介紹 γ 函數, 致力於超越函數的發展。他引進了一個解四次方程式的新方法。他發現計算複極限積分的計算, 預告了現代複分析的發展。他發明變分法, 導出歐拉-拉格朗日方程式用以解微分方程。

歐拉是用分析方法解數論問題的先驅, 因而引進解析數論這個新領域。在這方面引進超幾何級數、q-級數、雙曲函數、連分數的解析理論; 他用調和級數的發散性證明質數有無窮多個, 用解析方法得到質數分布的一些結果, 他的工作導致質數定理的一些發展。

數論

歐拉在數論的興趣深受其朋友, 聖彼得堡科學院 (St. Petersburg Academy) 的哥德巴赫[10]的影響。他早期在數論上的工作大多基於費馬[11]的工作, 例如, 發展了費馬的一些想法, 否定了他的猜想「所有 $2^{2^n}+1$ 的數均爲質數, 這種數現在稱爲費馬數。」

歐拉將質數分布和分析做了自然的連結。他證明了質數倒數和發散, 爲證明此事, 他發現黎曼 ζ 函數和質數的關聯, 這就是現在大家熟知的黎曼 ζ 函數的歐拉乘積公式。

歐拉發明了現在被稱爲歐拉函數的 $\varphi(n)$, 不超過 n 而與 n 互質的正整數個數, 用此推廣費馬小定理, 成爲現在大家熟知的歐拉定理。在計算機領域中廣泛使用的 RSA 公鑰密碼算法, 正是以歐拉函數爲基礎的。

他對完全數也有重大的貢獻, 這是自歐基里得以來大家熱衷的數學, 早期歐基里得證明梅仙尼質數可以用來製造偶完全數, 歐拉證明反過來也對, 因而確定了所有偶完全數和梅仙尼質數一一對應。1772 年歐拉證明了 $2^{31}-1=2,147,483,647$ 是一個梅仙尼質數, 這一直到 1867 年還是人們知道的最大質數。亦請參見科學月刊的文章 [24] 及數學傳播季刊的文章 [25]。

歐拉也預測了二次互反律, 這是數論裡一個重要的定理, 這導致後來高斯[12]在 Disquisitiones Arithmeticae 的工作。

歐拉在整數分割有重大的發展。

圖論

東普魯士的 Königsberg 市 (現在俄羅斯的 Kaliningrad 市) 有一條 Pregel 河 (現在的 Pregolya 河) 流經, 河的中心有兩個小島, 小島和河的兩岸有七座橋相連接。當地流傳著這樣

---

[10] 普魯士數學家克里斯蒂安·哥德巴赫 (Christian Goldbach), 1690 年 3 月 18 日 ～ 1764 年 10 月 20 日, 他在數學上的研究以數論爲主, 作爲哥德巴赫猜想的提出者而聞名。

[11] 法國律師、業餘數學家皮埃爾·德·費馬 (Pierre de Fermat), 1607 年 ～ 1665 年 1 月 12 日。

[12] 德國數學家、物理學家、天文學家、大地測量學家約翰·卡爾·弗里德里希·高斯 (Johann Carl Friedrich Gauss), 1777 年 4 月 30 日 ～ 1855 年 2 月 23 日。

一則謎題: 從某一塊土地開始, 要如何走才能恰好經過每一座橋一次。1736 年歐拉寫了一篇文章 [26], 得到一個不僅解決了七橋問題, 同時更一般的定理就這樣出現了, 這奠基了圖論這門學問。

和平面圖有關的是, 歐拉也發現了多面體公式 $V - E + F = 2$, 將多面體的點數、邊數、面數關聯起來。有關此公式的應用, 亦請參見數學傳播季刊的文章 [14] [20]。公式中的常數 2 就是圖或其他數學物件的歐拉示性數, 和物體的虧格有關, 高斯和 L'Huilier 將其推廣, 成爲拓樸的起源。

有關圖論的介紹, 亦請參見圖論教科書 [27] [28], 以及數學傳播季刊的文章 [11] [18]。

此外, 歐拉在物理、天文、工程、邏輯物理、音樂等許多領域都有傑出的貢獻。

3. 導讀歐拉的《無限分析導論》第一卷

爲了更清楚前述的一些說法, 我們來閱讀一下歐拉的《無限分析導論》第一卷 [22], 我們以英文翻譯本爲閱讀對象, 擇一些內容說明。

此書內文有 327 頁, 分爲 18 章, 總計有382 小節, 有些小節只有半頁。我們介紹到第 8 章, 講到世界上最美的數學式子 $e^{i\pi} + 1 = 0$, 後面只列出章名、節數。

第 1 頁開宗明義解釋本書主要內容包含「函數的解釋; 函數的分解及發展爲無窮級數; 以及對數理論, 弧度及其正弦與正切, 和分析中一些幫助不小的東西。」

第 I 章: 函數簡介 (1 ∼ 26 節)

第 1 小節介紹定量, 一般以開始的字母 a、b、c 等爲符號。

第 2 小節介紹變量, 一般以最後的字母 z、y、x 等爲符號。

這些用法有其歷史。

西元 628 年, 婆羅摩笈多[13]著《婆羅摩歷算書》(Brāhmasphuṭasiddhānta), 其中有一節「各種顏色的式子」, 用不同顏色表示代數式中的變數。這是變數的濫觴。

16 世紀末, 韋達[14]引入了使用字母表示已知及未知數字的想法, 並將這些字母視同數字般運算, 以便在最後簡單代入數值求解。他習慣以子音字母表示已知值, 以母音字母表示未知值。

西元 1637年, 笛卡兒[15]引入以 x, y, z 表示公式中的未知數, 以 a, b, c 表示已知數的習慣, 此一習慣沿用至今。

這一章將函數區分爲由代數運算產生的代數函數、以及由超越運算所產生的超越函數。代數函數又分爲非無理函數和無理函數 (例如 $a + \sqrt{a^2 - z^2}$), 其中非無理函數又分爲多項函數

[13]印度數學家婆羅摩笈多 (Brahmagupta), 598 年 ∼ 668 年。

[14]法國數學家弗朗索瓦·韋達 (François Viète), 1540 年 ∼ 1603 年。

[15]法國數學家勒內·笛卡兒 (René Descartes), 1596 年 ∼ 1650 年。

(例如 $a+z+cz^2$) 和有理函數 (例如 $\frac{a^2+z^2}{a+z}$)。

和現代用法不同的是, 在他們那個年代, 有所謂的「多值」函數。例如, 滿足 $Z^2=bz^5$ 的 Z 是以 z 爲變數的「隱」函數, 它是一個無理函數。

第 20 節定義偶函數, 第 21 節定義奇函數。接下來討論了一些相關性質。

第 II 章: **函數的變換** (27 ∼ 45 節)

函數的變換有很多種。有些是經過式子的運算, 例如 $2-3z+z^2$ 變爲 $(1-z)(2-z)$, 或是 $\frac{2a^2}{a^2-z^2}$ 化爲 $\frac{a}{a-z}+\frac{a}{a+z}$, 或是 $\frac{1+z^4}{1+z^2}$ 化爲 $z^2-1+\frac{2}{1+z^2}$。有些是引進新變數, 例如 z 的無理函數 $\sqrt{a^2+z^2}$, 令 $z=\frac{a^2-y^2}{2y}$, 就變成 y 的有理函數 $\frac{a^2+y^2}{2y}$。

在這裡已經用複數了。甚至複數都出現在平方根符號之內。此處也有複數根及共軛根成對的概念, 但是雖然沒說, 多項式函數都是指實係數多項式函數。

第 33 節說了多項式函數的中間值定理。

第 34 (35、36) 節說了奇次數多項式有一個 (奇數個、偶數個) 實係數線性因子。

後面又介紹了許多有理函數, 化爲部分分式的例子。

第 III 章: **以代換做函數的變換** (46 ∼ 58 節)

主要是變數變換。例如, 對於 $y=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, 令 $z=\frac{1-x}{1+x}$, 則 $y=\frac{2x}{1+x^2}$。

又如, 對於 $y=(a+bz)^{\frac{m}{n}}$, 如果希望 $y=x^m$, 就需要 $a+bz=x^n$, 也就是令 $z=\frac{x^n-a}{b}$, 就會有 $y=x^m$。

還有更多的例子, 如 $y=\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{\frac{m}{n}}$、$y=\sqrt{(a+bz)(c+dz)}$、$y=\sqrt{p+qz+rz^2}$ 等更多複雜的例子。

第 IV 章: **函數轉換為無窮級數** (59 ∼ 76 節)

歐拉的巧思從這一章開始展現。

由於有理函數或無理函數都不能像多項式函數一樣, 寫成有限項的和 $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$, 歐拉想要將其寫爲無窮多項的和。因爲他覺得, 我們已經很了解多項式, 如果其他函數也能寫成多項式的長相, 縱使是無窮多項的和, 對於了解它的性質也會有所幫忙。

這真是一個不可思議的想法。問題是, 任何一個函數都能有這樣一種表達的方法嗎? 歐拉以 $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ 爲例, 解釋他的想法。有兩種方法可以處理這個例子。

第一個方法是除法, 一種和我們熟悉的方法稍有不同的除法。首先, 將 a 除以 $\alpha+\beta z$, 得到商 $\frac{a}{\alpha}$ 及餘式 $-\frac{a\beta z}{\alpha}$, 接著再將 $-\frac{a\beta z}{\alpha}$ 除以 $\alpha+\beta z$, 得到商 $-\frac{a\beta z}{\alpha^2}$ 及餘式 $\frac{a\beta^2z^2}{\alpha^2}$, 繼續操作下去, 就會得到無窮級數 $\frac{a}{\alpha}-\frac{a\beta z}{\alpha^2}+\frac{a\beta^2z^2}{\alpha^3}-\frac{a\beta^3z^3}{\alpha^4}+\frac{a\beta^4z^4}{\alpha^5}+\cdots$。因爲連續兩項的比是 $-\frac{\alpha}{\beta z}$, 這就叫做幾何級數。

另一種方法是, 假設 $\frac{a}{\alpha+\beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots$, 因爲

$$\begin{aligned} a &= (\alpha+\beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \cdots) \\ &= \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \cdots \\ &\quad + \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \beta Ez^5 + \cdots\ , \end{aligned}$$

比較係數而有 $a = \alpha A$、$0 = \alpha B + \beta A = \alpha C + \beta B = \alpha D + \beta C = \alpha E + \beta D = \cdots$, 遂解得 $A = \frac{a}{\alpha}$、$B = -\frac{\beta A}{\alpha} = -\frac{a\beta}{\alpha^2}$、$C = -\frac{\beta B}{\alpha} = \frac{a\beta^2}{\alpha^3}$、$D = -\frac{\beta C}{\alpha} = -\frac{a\beta^3}{\alpha^4}$、$E = -\frac{\beta D}{\alpha} = \frac{a\beta^4}{\alpha^5}$、$\ldots$。得到一樣的答案。

歐拉的方法是以代數的思維, 用有限項的多項式方法, 類比處理無窮多項的級數。以現在分析理論的觀點, 並未處理收斂性; 不過導出來的式子都是對的, 而且用它們得到許多漂亮的結果; 以現在的觀點來說, 叫做型式冪級數 (formal power series)。

類似的方法也可以將 $\frac{a+bz}{\alpha z+\beta z+\gamma z^3}$ 化爲無窮級數。一般的有理函數也都類似。

至於無理函數則可以透過下面的一般定理:

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m-n}{n}}Q + \frac{m(m-n)}{n\cdot 2n}P^{\frac{m-2n}{n}}Q^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n\cdot 2n\cdot 3n}P^{\frac{m-3n}{n}}Q^3 + \cdots\ ,$$

其中的項數爲無窮多項, 除非 $\frac{m}{n}$ 是正整數。

第 V 章: 關於兩或多個變數的函數 (77 ∼ 95 節)

例子有 $\frac{y^5+z^5}{y^2+z^2}$、$\frac{y^3+z^3}{y^2z}$、$\frac{y+z}{y^4+z^4}$、$\sqrt{y^2+z^2}$ 等。不再推導。

第 VI 章: 指數與對數 (96 ∼ 113 節)

這一章介紹指數函數 $y = a^z$, 把 y 看成變數 z 的函數。當 $a = 1$, 這是常數函數, 太簡單不討論。當 $a > 1$, z 趨向 $-\infty$、等於 0、趨向 ∞ 時, y 分別趨向 0、等於 1、趨向 ∞。當 $a < 1$ 時, $\frac{1}{a} > 1$, 所以 $y = a^z$ 可以透過 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^{-z}$ 來了解。因此, 可以只處理 $a > 1$ 的情況。

反過來, $y = a^z$ 可以把 z 看成是 y 的函數, 叫做 y 的對數, 記爲 $z = \log y$。要注意的是, 他並沒有將 a 放在對數符號中, 而是假設我們都記得底數是 a。

討論了指數律和對數律。也介紹了對數表製作的原理。以及對數如何幫忙簡化計算。

第 VII 章: 用級數表示指數與對數 (114 ∼ 125 節)

因爲 $a^0 = 1$, 所以當 ω 爲無窮小量時, $a^\omega = 1 + \psi$ 中的 ψ 也是無窮小量; 反過來, 當ψ 是無窮小量時, ω 也是無窮小量。這兩個量有可能是 $\psi = \omega$ 或 $\psi > \omega$ 或 $\psi < \omega$, 視 a 值而

定, 所以令 $\psi=k\omega$, 就會有 $a^{\omega}=1+k\omega$, [16] 對於以 a 爲底的對數就會有 $\omega=\log(1+k\omega)$。

因爲 $a^{\omega}=1+k\omega$, 對於任意 j 都會有 $a^{j\omega}=(1+k\omega)^{j}$, 次方展開得到

$$a^{j\omega}=1+\frac{j}{1}k\omega+\frac{j(j-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2+\frac{j(j-1)(j-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3+\cdots。$$

令 $j=\frac{z}{\omega}$, 其中z 爲有限數, ω 爲無窮小量, 因而 j 爲無窮大量。將 $\omega=\frac{z}{j}$ 代入前式, 得

$$a^{z}=1+\frac{1}{1}kz+\frac{1(j-1)}{1\cdot 2j}k^2z^2+\frac{1(j-1)(j-2)}{1\cdot 2j\cdot 3j}k^3z^3+\frac{1(j-1)(j-2)(j-3)}{1\cdot 2j\cdot 3j\cdot 4j}k^4z^4+\cdots。$$

因爲 j 爲無窮大量, $\frac{j-1}{j}$、$\frac{j-1}{2j}$、$\frac{j-1}{3j}$ 分別靠近 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$ 等[17], 而有

$$a^{z}=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots。$$

其中 $a=1+\dfrac{k}{1}+\dfrac{k^2}{1\cdot 2}+\dfrac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$。

將前一段的推導用以 a 爲底的對數討論, 令 $1+x=a^{z}$。一方面, $\log(1+x)=z=j\omega$。另一方面, $1+x=a^{z}=(a^{\omega})^{j}=(1+k\omega)^{j}$, 而有 $k\omega=(1+x)^{\frac{1}{j}}-1$, 或是 $j\omega=\frac{j}{k}(1+x)^{\frac{1}{j}}-\frac{j}{k}$。綜合得到 $\log(1+x)=\frac{j}{k}(1+x)^{\frac{1}{j}}-\frac{j}{k}$, 其中

$$(1+x)^{\frac{1}{j}}=1+\frac{1}{j}x-\frac{1(j-1)}{j\cdot 2j}x^2+\frac{1(j-1)(2j-1)}{j\cdot 2j\cdot 3j}x^3-\frac{1(j-1)(2j-1)(3j-1)}{j\cdot 2j\cdot 3j\cdot 4j}x^4+\cdots。$$

因爲 j 爲無窮大量, $\frac{j-1}{2j}$、$\frac{2j-1}{3j}$、$\frac{3j-1}{4j}$ 分別靠近 $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$ 等, 而有

$$\log(1+x)=\frac{1}{k}\Big(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\Big),$$

其中對數的底是 $a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$。

到此, 一般底的指數和對數的無窮級數表示法完成了, 式子中都有一個由 a 決定的常數 k, 爲了讓式子乾淨, 歐拉決定

「取 a 使得 $k=1$, 這個特殊的 a 就用 e 表示, 」

其值爲 2.718281828459045235360 28 . . .。此時就有我們熟悉的式子

$$e^{z}=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,$$

[16] 用現在的說法, 這就是 $\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{a^{\omega}-1}{\omega}=k$, 而有 $\frac{da^x}{dx}=\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{a^{x+\omega}-a^x}{\omega}=\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{a^x(a^{\omega}-1)}{\omega}=a^x\lim\limits_{\omega\to 0}\frac{a^{\omega}-1}{\omega}=ka^x$。

[17] 這裡已經有極限的思維, 雖然推導過程以現代的眼光來說比較粗糙, 但大方向是正確的, 得到的結果對後世有正向的導引。後面有關三角函數的推導亦同。

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\text{。(以 } e \text{ 爲底)}$$

第 VIII 章: 由圓產生的超越量 (126 ∼ 142 節)

首先介紹以 π 當作圓周率的符號, 並列出其值到小數點後 127 位。有關圓周率亦請參見數學傳播季刊的文章 [29] [30] [31] [32] [15] [33] [16] [34] [35] [36]。

介紹正弦 sin、餘弦 cos、正切 tan、餘切 cot, 以及一些基本性質, 例如正弦和餘弦的平方和公式、和差角公式、平移公式、積化和差、和差化積、棣美弗公式, 最後導到 n 倍角公式

$$\begin{aligned}\cos nz=(\cos z)^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2\\ +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4\\ -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(\cos z)^{n-6}(\sin z)^6+\cdots\end{aligned}$$

$$\text{及}\quad \begin{aligned}\sin nz=\frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3\\ +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\cos z)^{n-5}(\sin z)^5+\cdots\text{。}\end{aligned}$$

令有限數 $v=nz$, 其中 n 爲無窮大量, z 爲無窮小量, 所以 $\sin z=z$ 且 $\cos z=1$, 前面的式子就成爲

$$\begin{aligned}\cos v&=1-\frac{v^2}{1\cdot 2}+\frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\quad\text{及}\\ \sin v&=v-\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\cdots\text{。}\end{aligned}$$

並利用這些公式推導出複數的指數公式

$$e^{iv}=\cos v+i\sin v,$$

當 $v=\pi$ 時就是前面說的世界上最美的數學式子 $e^{i\pi}+1=0$。

第 IX 章: 三次多項式因子 (143 ∼ 164 節)

第 X 章: 利用因子求無窮級數和 (165 ∼ 183 節)

第 XI 章: 弧及正弦的其他無窮表示式 (184 ∼ 198 節)

第 XII 章: 實有理函數的發展 (199 ∼ 210 節)

第 XIII 章: 遞迴級數 (211 ∼ 233 節)

第 XIV 章: 角的相乘和相除 (234 ∼ 263 節)

第 XV 章: 由乘積產生的級數 (264 ∼ 296 節)

第 XVI 章: **整數分割** (297 ∼ 331 **節**)

第 XVII 章: **利用遞迴級數求方程式的解** (332 ∼ 355 **節**)

第 XVIII 章: **連分數** (356 ∼ 382 **節**)

4. 三角形外心與內心距離公式的純平面幾何證明

最後回到文章一開始提到的等式 (2), 也就是, 如果一個三角形的外接圓半徑是 R、內切圓半徑是 r, 則這個三角形外心和內心的距離 d 滿足

$$d^2 = R(R-2r)。$$

這裡採用維基百科, 歐拉定理 (幾何) 的證明; 不過我把一些理由寫得更詳細。這個證明的好處是簡明, 而且幾乎一樣的證明可以將內心換為旁心, 得到類似的公式。

假設三角形 ABC 的外心是 O、內心是 I, 其距離為 d。

當 $d=0$ 時, 外心 O 和內心 I 重合, 此時三角形 ABC 是正三角形, 由 30°-60°-90° 三角形邊長比可知 $R=2r$, 公式 $d^2=R(R-2r)$ 成立。

當 $d>0$ 時, 參考右圖, 延長 AI 交外接圓於 D, 延長 DO 交外接圓於 E, 過 I 向 AB 作垂線、垂足為 F。

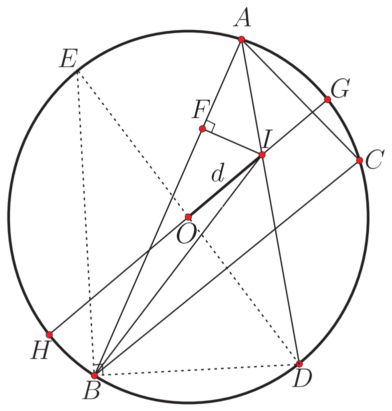

圖1

由於 $\angle FAI = \angle BED$ (圓的同弦對等角) 以及 $\angle IFA = \angle DBE = 90°$, 得知三角形 AIF 與三角形 EDB 相似, 所以 $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{IF}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{DB}}$, 也就是 $\dfrac{\overline{AI}}{r} = \dfrac{2R}{\overline{DB}}$, 而有

$$2Rr = \overline{AI}\cdot\overline{DB}。\tag{3}$$

另外, 由於 IA 是 $\angle A$ 的平分線而有 $\angle IAB = \angle IAC$, 且 IB 是 $\angle B$ 的平分線而有 $\angle IBA = \angle IBC$; 另外 $\angle IAC = \angle CBD$ (圓的同弦對等角)。再由三角形外角等於不相鄰兩內角和得知 $\angle DIB = \angle IAB + \angle IBA = \angle IAC + \angle IBC = \angle CBD + \angle IBC = \angle DBI$。再由三角形中等角對等邊, 得到

$$\overline{DB} = \overline{ID}。\tag{4}$$

最後, 連接 OI 交外接圓於 G、H, 由於三角形 AIG 與三角形 HID 相似 (為不使圖形複雜, 此處並未將線段 AG 和 HD 畫出來, 注意到, 此處也用到圓的同弦對等角), 所以 $\frac{\overline{AI}}{\overline{IG}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{ID}}$, 而有

$$\overline{AI}\cdot\overline{ID} = \overline{IG}\cdot\overline{HI}。\tag{5}$$

綜合式 (3)、(4)、(5) 遂有 $2Rr=\overline{AI}\cdot\overline{DB}=\overline{AI}\cdot\overline{ID}=\overline{IG}\cdot\overline{HI}=(R-d)(R+d)=R^2-d^2$, 移項得到 $d^2=R^2-2Rr=R(R-2r)$, 證到所要的等式。

歐基里得的幾何原本一向被視爲是鍛鍊邏輯思考的經典, 過去學習數學這都是必經的一道門, 就好像在中國要學論語一樣的自然, 因此國中的數學課在平面幾何的訓練一向紮實。可是過去國中的平面幾何, 對於許多普通的學生來說, 是太難了一些。所以歷次的課綱都逐漸把一些較難的題材排除, 回歸到最基本的內容。108 課綱也做了一次調整, 例如式 (5) 是過去要學的相交弦定理, 108 課綱就將其排除了, 意思是說, 只要掌握相似三角形的精神, 這種等式都不是難題。或者換一個講法, 與其背這種定理來使用, 因爲它的推導算是容易, 不如要用時再推導一下, 更能時時練習最基本的相似三角形的精神。這也算是培養素養的一種方式吧。

相關議題的歐拉線及九點圓, 亦請參見 數學傳播的文章 [8] [9] [17] [19]。

5. 三角形外心與旁心距離公式的純平面幾何證明

前一節的證明方法, 除了簡明以外, 也很容易修改得到三角形外心與旁心距離公式。例如, 如果三角形 ABC 的外心是 O 而外接圓半徑是 R、角 A 所對的旁心是 I 而旁切圓的半徑是 r_a, O 和 I 的距離爲 d, 則會有

$$d^2=R(R+2r_a)。$$

其他角所對的旁心也有類似的公式。證明只是前一節證明的小修改。

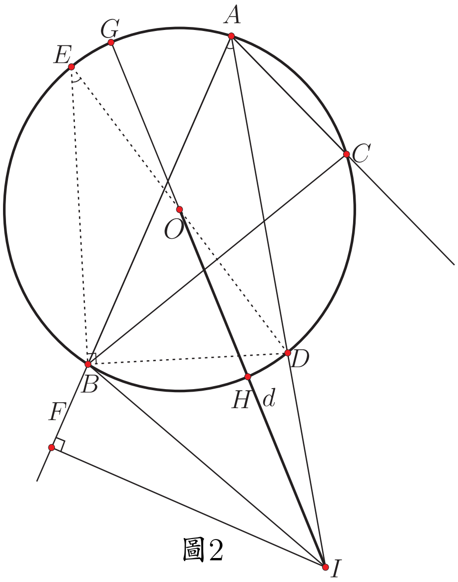

圖2

參考右圖, 連接線段 $\overline{AI}$ 交外接圓於 D, 延長 DO 交外接圓於 E, 過 I 向 AB 作垂線、垂足爲 F。

由於 $\angle FAI=\angle BED$ (圓的同弦對等角) 以及 $\angle IFA=\angle DBE=90°$, 得知三角形 AIF 與三角形 EDB 相似, 所以 $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{IF}}=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{DB}}$, 也就是 $\dfrac{\overline{AI}}{r_a}=\dfrac{2R}{\overline{DB}}$, 而有

$$2Rr_a=\overline{AI}\cdot\overline{DB}。\tag{6}$$

另外, 由於 IA 是 $\angle A$ 的平分線而有 $\angle IAB=\angle IAC$, 且 IB 是 $\angle B$ 的外角平分線而有 $\angle IBF=\angle IBC$; 另外 $\angle IAC=\angle CBD$ (圓的同弦對等角)。再由三角形外角等於不相鄰兩內角和得知 $\angle DIB=\angle IBF-\angle IAB=\angle IBC-\angle IAC=\angle IBC-\angle CBD=\angle DBI$。

再由三角形中等角對等邊, 得到

$$\overline{DB}=\overline{ID}。\tag{7}$$

最後, 連接 OI 交外接圓於 G、H, 由於三角形 AIH 與三角形 GID 相似 (爲不使圖形複雜, 此處並未將線段 AH 和 GD 畫出來, 注意到, 此處也用到圓的同弦對等角), 所以 $\frac{\overline{AI}}{\overline{IH}}=\frac{\overline{GI}}{\overline{ID}}$, 而有

$$\overline{AI}\cdot\overline{ID}=\overline{GI}\cdot\overline{IH}。\tag{8}$$

綜合式 (6)、(7)、(8) 遂有 $2Rr_a=\overline{AI}\cdot\overline{DB}=\overline{AI}\cdot\overline{ID}=\overline{GI}\cdot\overline{IH}=(d+R)(d-R)=d^2-R^2$, 移項得到 $d^2=R^2+2Rr_a=R(R+2r_a)$, 證到所要的等式。

參考文獻

1. 連威翔。歐拉不等式的另證。數學傳播季刊, 第180期, 43-49, 2021。
2. 教育部。十二年國民基本教育課程綱要、國民中小學暨普通型高級中等學校、數學領域。台北市: 教育部, 2018 年 6 月。
3. 單維彰主編, 吳汀菱、曾明德、單維彰、鄭章華、謝豐瑞著。中學數學教材教法。台北市: 教育部, 五南圖書出版有限公司, 2020 年 3 月。
4. Bruce Schechter 著, 曾蕙蘭譯。不只一點瘋狂 — 天才數學家艾狄胥傳奇。先覺出版社, 1999。
5. 保羅·霍夫曼 Paul Hoffman 著, 米緒軍、章曉燕、繆衛東譯。數字愛人。台灣商務印書館, 2001。
6. 蔡聰明。數學家 Paul Erdös。數學傳播季刊, 第84期, 42-45, 1997。
7. 張鎮華。Paul Erdős 與組合學中的機率方法。數學傳播季刊, 第167期, 25-42, 2018。
8. 李成復。關於實驗教材第三冊「歐拉線」的一個證明。數學傳播季刊, 第1期, 1976。
9. 李正財。B0013 歐拉線。數學傳播季刊, 第1期, 1976。
10. 張鎮華。閒話尤拉的絕招。數學傳播季刊, 第7期, 42-45, 1978。
11. 何景國、陳金章。拓撲學中的一筆畫與尤拉公式。數學傳播季刊, 第28期, 17-27, 1983。
12. 王湘君。尤拉—計算專家。數學傳播季刊, 第36期, 1985。
13. 沈淵源。從尤拉數 e 到 Stirling 常數。數學傳播季刊, 第77期, 34-45, 1996。
14. 宋秉信。從尤拉公式到空間的平面分割。數學傳播季刊, 第87期, 54-60, 1998。
15. 黃見利。勒貝格單調收斂定理一個有趣的應用: 證明尤拉的反正切公式。數學傳播季刊, 第122期, 76-80, 2007。
16. 黃見利。一個有趣的計算圓周率方法 — 雙反正切項尤拉型公式。數學傳播季刊, 第129期, 57-64, 2009。
17. 張海潮。從旋轉及縮放看尤拉線與九點圓。數學傳播季刊, 第130期, 48-51, 2009。
18. 程釗。歐拉關於七橋問題的解 — 從數學史與數學教育的角度看。數學傳播季刊, 第144期, 42-47, 2012。
19. 楊玉星。圓內接多邊形的歐拉線。數學傳播季刊, 第175期, 66-72, 2020。
20. 許閎揚。使用歐拉公式來求解一些平面分割數的問題。數學傳播季刊, 第178期, 38-43, 2021。
21. 張海潮。虛功原理及歐拉-拉格朗日方程式。數學傳播季刊, 第180期, 11-17, 2021。
22. L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum, Book I & II*, 1748 (English translation

"*Introduction to Analysis of the Infinite, Book I* & *II*" by John D. Blanton, Springer-Verlag, 1988 & 1989.)
23. 小川洋子著, 王蘊潔譯。《博士熱愛的算式》(日语: 博士の愛した数式)。麥田出版, 三版十六刷, 2020 年 9 月; 初版, 2004 年 7 月。
24. 張鎮華。完全數與莫仙尼質數。科學月刊, 第 27 期, 40-42, 1972。
25. 黃文璋。完全數與梅仙尼質數。數學傳播季刊, 第83期, 14-30, 1997。
26. L. Euler, Soluto problematics ad geometriam situs pertinentis, *Commentaii Academiae Scientiarum Impericalis Petropolictanae*, **8** (1736), 128-140.
27. 張鎮華。演算法觀點的圖論。臺大出版中心, 2017。
28. 張鎮華、蔡牧村。演算法觀點的圖論 (修訂版)。臺大出版中心, 2020。
29. 王九逵。怎麼算 π。數學傳播季刊, 第38期, 2-9, 1986。
30. 余文卿、葉國榮。關於圓周率 π。數學傳播季刊, 第51期, 55-59, 1989。
31. 石厚高。祖沖之計算圓周率之謎。數學傳播季刊, 第97期, 82-86, 2001。
32. 黃見利。如何衍生 Machin 型公式。數學傳播季刊, 第113期, 18-29, 2005。
33. 黃見利。兩種近似圓周率的算法。數學傳播季刊, 第125期, 77-83, 2008。
34. 張鎮華。我家 π 的故事 — 兼談電子計算機在數學上的威力。數學傳播季刊, 第156期, 33-43, 2015。
35. 沈淵源。與巨人同行一探圓周率。數學傳播季刊, 第168期, 46-70, 2018。
36. 張鎮華。無理數到底有多無理。數學傳播季刊, 第176期, 34-37, 2020。

—本文作者爲臺灣大學數學系名譽教授—